JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **11**, 149–158 (1974)

Convergence de l'Algorithme de Rémès

CLAUDE CARASSO

Université de Saint-Etienne, U.E.R. Sciences, 23 rue du Dr. Paul Michelon, 42100 Saint Etienne, France

Communicated by E. W. Cheney

I. INTRODUCTION

L'approximation d'un élément d'un espace vectoriel normé par un élément d'un sous-espace vectoriel de dimension finie se fait habituellement en utilisant l'algorithme de Rémès. Cet algorithme, d'abord développé par Rémès [6] puis Stiefel [8] a été généralisé par Laurent [4] au cas d'un espace vectoriel normé quelconque.

Tous ces auteurs démontrent la convergence de l'algorithme en faisant une hypothèse très forte sur le sous espace vectoriel ("condition de Haar"). On constate expérimentalement que, même si cette condition n'est pas réalisée, l'algorithme converge souvent vers un meilleur approximant. On démontre ici, que l'algorithme, lorsqu'il se déroule sans "incidents" (on dira qu'il est itératif), permet d'obtenir numériquement un meilleur approximant lorsqu'une hypothèse beaucoup plus faible (et générique [2]) est vérifiée.

Par exemple, lorsque l'on approche au sens de la norme du max dans l'espace des fonctions continues sur un compact, on suppose simplement que les fonctions de base du sous-espace vectoriel ne s'annulent pas toutes en un même point.

II. DESCRIPTION GÉOMÉTRIQUE DE L'ALGORITHME

2.1. *Notations*

Soit E un espace vectoriel normé (on note $\|\cdot\|$ sa norme), $f, f_1, \ldots, f_n$ $n+1$ éléments linéairement indépendants de E; on note V le sous espace vectoriel de E engendré par $f_1, \ldots, f_n$. On cherche un élément $\bar{g}$ de V vérifiant:

$$\|f - \bar{g}\| = \mathrm{Min}[\|f - g\| \mid g \in V] = \bar{\imath}.$$

$\bar{g}$ sera appelé meilleur approximant de f dans V.

Soit E' le dual topologique de E muni de la topologie faible $\sigma(E', E)$ et S' la boule unité de E' fort. On note $\mathscr{E}(S')$ l'ensemble des points extrêmaux de S'.

On note $\langle g, t\rangle = t(g)$ la valeur en $g \in E$ de la forme linéaire continue $t \in E'$.

Soit Ψ l'application de $\mathscr{E}(S')$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ définie par:

$$t \mapsto (\langle f, t\rangle, \langle f_1, t\rangle, ..., \langle f_n, t\rangle).$$

On pose: $\Gamma = \Psi(\mathscr{E}(S'))$ (Γ est symétrique par rapport à 0). Soit π l'application projection de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans $\mathbf{R}^n$

$$(x_0, x_1, ..., x_n) \to (x_1, x_2, ..., x_n).$$

On pose: $\pi(x) = \hat{x}$ et $\pi(A) = \hat{A}$ si $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Soit $\hat{\Psi}$ l'application de $\mathscr{E}(S')$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\hat{\Psi}(t) = \pi(\Psi(t)).$$

Soit $e_0 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et D_0^+ la demi droite positive de $\mathbf{R}^{n+1}$ engendrée par e_0

$$D_0^+ = R^+ \cdot e_0 .$$

Remarque 1.1. Lorsque $E = C[0, 1]$ les fonctionnelles de $\mathscr{E}(S')$ sont de la forme

$$g \to \epsilon g(t) \qquad \text{avec} \quad \epsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad t \in [0, 1] \qquad [3, \text{p. } 441].$$

L'ensemble Γ est alors formé des éléments de la forme

$$\epsilon(f(t), f_1(t), ..., f_n(t)) \qquad \text{avec} \quad \epsilon = \pm 1 \qquad [1, 2].$$

2.2. *Interprétation Géométrique*

La norme d'un élément g de E peut s'écrire [4]

$$\| g \| = \underset{t \in \mathscr{E}(S')}{\operatorname{Max}} \langle g, t\rangle.$$

On a donc:

$$\bar{\imath} = \| f - \bar{g} \| = \underset{g \in V}{\operatorname{Min}} \underset{t \in \mathscr{E}(S')}{\operatorname{Max}} \langle f - g, t\rangle.$$

En posant: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ et en notant $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire Euclidien de $\mathbf{R}^{n+1}$ on obtient:

$$\bar{\imath} = \underset{\lambda \in \mathbf{R}^n}{\operatorname{Min}} \underset{t \in \mathscr{E}(S')}{\operatorname{Max}} ([1, -\lambda] \mid \Psi(t))$$

ou en posant:

$$i_\lambda = \operatorname*{Max}_{X \in \Gamma} ([1, -\lambda] \mid X) = \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right\|$$

$$\bar{i} = \operatorname*{Min}_{\lambda \in \mathbf{R}^n} i_\lambda .$$

La quantité $i_\lambda e_0$ représente l'intersection avec D_0^+ de l'hyperplan d'appui à Γ orthogonal à la direction $(1, -\lambda_1, ..., -\lambda_n)$.

La recherche d'un meilleur approximant revient donc à rechercher un hyperplan $\bar{H}$ d'appui à Γ qui coupe D_0^+ le plus près possible de zéro. On dira qu'un hyperplan est optimal s'il est d'appui à Γ et coupe D_0^+ en $\bar{i}e_0 = \bar{I}$. Tout hyperplan optimal définit un meilleur approximant; il suffit pour celà de considérer le vecteur $(1, -\lambda_1, ..., -\lambda_n)$ orthogonal à l'hyperplan; l'élément $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est alors un meilleur approximant.

Nous allons caractériser parmi les hyperplans d'appui à Γ qui coupent D_0^+ ceux qui sont optimaux.

Remarquons que, les éléments $f_1, f_2, ..., f_n$ étant linéairement indépendants, un hyperplan d'appui à Γ ne peut contenir la droite D_0.

En effet, soit H (de direction $[0, \lambda]$) un tel hyperplan; Γ étant symétrique, si H contient D_0 il contient aussi Γ; on a donc $(\lambda \mid \Psi(t)) = 0$, pour tout $t \in \mathscr{E}(S')$, soit:

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j = 0 \qquad \text{avec} \quad \lambda \neq 0.$$

PROPOSITION 1. *Soit H un hyperplan d'appui à Γ qui coupe D_0^+ en $I = i \cdot e_0$ (donc $i \geqslant 0$).*

Une condition nécessaire et suffisante pour que H soit un hyperplan optimal est qu'il existe k ($1 \leqslant k \leqslant n + 1$) points de $H \cap \Gamma$ tels que I appartienne à l'enveloppe convexe de ces k points.

Ce théorème est une formulation géométrique du théorème 3 de [4] (voir aussi [7]).

2.3. *Description de l'Algorithme*

L'algorithme a pour but de déterminer une suite d'hyperplans H^k coupant D_0^+ en $i^k e_0$ et tels que $\lim_{k\to\infty} i^k = \bar{i}$.

Passage de l'étape k à l'étape $k + 1$. On dispose à l'étape k de $n + 1$ points indépendants X_j^k de Γ engendrant un hyperplan H^k qui coupe D_0^+ en $I^k = i^k e_0$ appartenant à l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe des X_j^k $(j = 1, ..., n + 1)$.

Soit $\bar{H}^k$ l'hyperplan d'appui à Γ parallèle à H^k coupant D_0^+ en $\bar{I}^k = \bar{\imath}^k e_0$, avec $i^k \leqslant \bar{\imath}^k$. On choisit un point Z^{k+1} de $\bar{H}^k \cap \Gamma$. On note S^k l'enveloppe convexe des $n + 2$ points de $\mathbf{R}^{n+1}$

$$X_1^k, \ldots, X_{n+1}^k, Z^{k+1}.$$

La demi droite D_0^+ pénètre dans S^k en I^k appartenant à la face de dimension n de S^k de sommets X_j^k $(j = 1, \ldots, n + 1)$; elle ressort de S^k au points $I^{k+1} = i^{k+1} \cdot e_0$.

Deux éventualités peuvent se produire:

(1) $i^k = \bar{\imath}^k$. L'hyperplan H^k est alors d'appui à Γ et d'après la proposition 1 c'est un hyperplan optimal donc $i^k = \bar{\imath}$.

(2) $i^k < \bar{\imath}^k$. On a alors deux éventualités suivant la position de Z^{k+1}.

(2a) I^{k+1} appartient à l'intérieur relatif d'une face de dimension n de S^k de sommets:

$$Z^{k+1}, X_j^k \qquad (j = 1, \ldots, n + 1; j \neq j_0^k).$$

On pose:

$$X_j^{k+1} = X_j^k, \qquad j = 1, \ldots, n + 1, \quad j \neq j_0^k,$$

et

$$X_{j_0^k}^{k+1} = Z^{k+1}.$$

L'hyperplan H^{k+1} est alors l'hyperplan passant par ces points.

(2b) Le point I^{k+1} appartient à une face de dimension r $(r < n)$ de S^k. Dans ce cas l'algorithme ne peut se poursuivre.

Remarque 2.1. On doit évidemment se donner au départ $n + 1$ points X_j^0 de Γ $(j = 1, \ldots, n + 1)$ tels que l'hyperplan H^0 qu'ils définissent coupe D_0^+ en $I^0 = i^0 \cdot e_0$ appartenant à l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe de ces points.

DÉFINITION 2.1. On dit que *l'algorithme est itératif* si l'éventualité (2b) ne se produit à aucune étape k $(k = 1, 2, \ldots)$.

Lorsque l'éventualité (1) se produit, on pose:

$$i^j = \bar{\imath}^j = i^k = \bar{\imath}^k \qquad \text{pour} \quad k \leqslant j.$$

Soit $(1, -\lambda^k) = (1, -\lambda_1^k, \ldots, -\lambda_n^k) \in \mathbf{R}^{n+1}$ le vecteur orthogonal à H^k. On pose $g^k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k f_j$. On a alors

$$\bar{\imath}^k = \| f - g^k \|.$$

Dans le cas (1) on a: $\bar{\imath}^k = \bar{\imath}$ et g^k est un meilleur approximant. Dans le cas (2) on a

$$i^k \leqslant i^{k+1} \leqslant \bar{\imath} \leqslant \bar{\imath}^k,$$

certaines inégalités pouvant être strictes.

Si $\bar{\imath}^k - i^k < \epsilon$ alors g^k est tel que $\| f - g^k \|$ approche à ϵ près la distance $\bar{\imath}$ entre f et le sous espace vectoriel V. D'où la définition.

DÉFINITION 2.2. On dira que l'algorithme converge si 0 est une valeur d'adhérence de la suite $\{\bar{\imath}^k - i^k\}_{k\in\mathbf{N}}$.

On a alors le résultat suivant.

PROPOSITION 2. *Si l'algorithme est itératif et si aucune fonctionnelles de* $\overline{\mathscr{E}(S')}$ *ne s'annule sur* V, *alors l'algorithme converge.*

Remarque 2.2. L'algorithme précédent a été étudié en faisant l'hypothèse suivante sur V (généralisation de l'hypothèse de Haar, voir [4]):

> "Tout élément de V s'annule sur au plus $n - 1$ fonctionnelles non opposées de $\overline{\mathscr{E}(S')}$."

Cette hypothèse assure l'unicité du meilleur approximant et entraîne que l'algorithme est itératif et que $\lim_{k\to\infty}(\bar{\imath}^k - i^k) = 0$.

Malheureusement cette hypothèse est rarement vérifiée [2, 5].

III. DÉMONSTRATION DE LA CONVERGENCE (PROPOSITION 2)

Le cas où l'éventualité (1) se produit étant trivial, nous supposerons que l'on se trouve toujours dans l'éventualité (2a).

Le polyèdre S^k de sommets $X_1^k,..., X_{n+1}^k$, Z^{k+1} est alors un $n + 1$-simplexe dans $\mathbf{R}^{n+1}$.

Si $X_1, X_2,..., X_{r+1}$ désignent $r + 1$ sommets de S^k, on note $[X_1,..., X_{r+1}]$ la variété linéaire de dimension r engendrée par ces $r + 1$ points. On note $d(X, A)$ la distance Euclidienne dans $\mathbf{R}^{n+1}$ d'un point X à un ensemble A. Notons $\mathscr{F}_p{}^k$ l'ensemble des faces de dimension p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ de S^k. Une face élément de $\mathscr{F}_p{}^k$ est définie par la donnée de $p + 1$ sommets appartenant à S^k.

Soit U^k l'intersection de la droite $[Z^{k+1}, I^{k+1}]$ avec H^k. U^k appartient à la face de dimension $n - 1$ de sommets:

$$X_j^k \qquad (j = 1,..., n + 1; j \neq j_0^k).$$

Posons

$$\rho^{k+1} = \frac{i^{k+1} - i^k}{\bar{i}^k - i^k} \qquad (\rho^{k+1} \geqslant 0);$$

les hyperplans H^k et $\bar{H}^k$ étant parallèles, on a aussi;

$$I^{k+1} - U^k = \rho^{k+1}(Z^{k+1} - U^k).$$

Soit p le plus grand entier tel qu'il existe $\eta > 0$ vérifiant pour tout $k \in \mathbf{N}$ ($k = 0, 1, 2,...$) la relation:

$$\operatorname*{Min}_{F \in \mathscr{F}_p^k} d(I^{k+1}, F) > \eta.$$

Remarquons que $p \geqslant 0$ car par hypothèse 0 n'appartient pas à $\overline{\Psi(\mathscr{E}(S'))}$ qui est aussi égal ($\overline{\mathscr{E}(S')}$ étant compact) à $\Psi(\mathscr{E}(S'))$ qui représente l'adhérence de $\hat{\Gamma}$; donc

$$d(0, \hat{\Gamma}) > 0 \qquad \text{et par suite } (\pi \text{ étant contractante}),$$

on aura pour tout X_j^k (représentant une face de dimension 0 de $\mathscr{F}_p^k$)

$$d(I^{k+1}, X_j^k) \geqslant d(0, \hat{\Gamma}) > 0.$$

La suite $\{i^k\}$, étant croissante et bornée supérieurement, converge vers une valeur notée $\tilde{i}$; on a donc

$$\lim_{k\to\infty} d(I^{k+1}, I^k) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} I^k = \tilde{I} = \tilde{i}e_0\,,$$

mais $I^k \in [X_1^k,..., X_{n+1}^k]$, d'où

$$\lim_{k\to\infty} d(I^{k+1}, [X_1^k,..., X_{n+1}^k]) = 0$$

et par suite $p \leqslant n - 1$.

(1) *Si* $p = n - 1$,

il existe $\eta > 0$ tel que pour tout k on ait

$$d(I^{k+1}, [X_j^k; j = 1,..., n+1; j \neq j_0^k]) \geqslant \eta$$

donc

$$\| I^{k+1} - U^k \| \geqslant \eta$$

et

$$\rho^{k+1} \geqslant \frac{\eta}{\| Z^{k+1} - U^k \|}\,.$$

L'ensemble Γ étant borné dans $\mathbf{R}^{n+1}$, $\| Z^{k+1} - U^k \|$ est borné supérieurement; il existe donc $s > 0$ tel que

$$0 < s < \rho^{k+1}.$$

De la relation

$$\bar{\imath}^k - i^k = (\rho^{k+1})^{-1} (i^{k+1} - i^k),$$

on déduit

$$\bar{\imath}^k - i^k \leqslant s^{-1}(i^{k+1} - i^k).$$

La suite $\{i^k\}$ étant convergente, on a $\lim_{k\to\infty}(\bar{\imath}^k - i^k) = 0$ et l'algorithme converge.

(2) *Si* $0 \leqslant p < n - 1$.

(2.1) Supposons

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \rho^{k+1} = \alpha > 0.$$

Soit $\{\rho^{k(j)+1}\}$ une sous sous-suite telle que $\lim_{j\to\infty} \rho^{k(j)+1} = \alpha$. Il existe alors $\epsilon > 0$ et un indice $\bar{\jmath}$ tel que

$$\text{pour} \quad j > \bar{\jmath} \qquad \text{on ait} \quad \rho^{k(j)} \geqslant \alpha - \epsilon > 0.$$

On en déduit

$$\bar{\imath}^{k(j)} - i^{k(j)} \leqslant (\alpha - \epsilon)^{-1} (i^{k(j)+1} - i^{k(j)})$$

donc

$$\lim_{j\to\infty} (\bar{\imath}^{k(j)} - i^{k(j)}) = 0$$

et l'algorithme converge.

(2.2) Supposons maintenant que l'on ait

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \rho^{k+1} = \lim_{k\to\infty} \rho^{k+1} = 0.$$

Par définition de p, il existe une suite $\{F^{\varphi(k)}\}$ de faces, avec $F^{\varphi(k)} \in \mathscr{F}_{p+1}^{\varphi(k)}$, telle que

$$\lim_{k\to\infty} d(I^{\varphi(k)+1}, F^{\varphi(k)}) = 0.$$

(φ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et on suppose que $F^{\varphi(k)} \neq F^{\varphi(k+1)}$).

Puisque $\lim_{k\to\infty} I^k = \tilde{I}$, on a aussi

$$\lim_{k\to\infty} d(\tilde{I}, F^{\varphi(k)}) = 0.$$

Quitte à en extraire une sous suite, on supposera que la suite $\{F^{\varphi(k)}\}$ est telle que $F^{\varphi(k+1)} \notin \mathscr{F}^{\varphi(k)}_{p+1}$.

Chaque face $F^{\varphi(k+1)}$ contient donc un élément $Z^{\Psi(k)+1}$ avec $\varphi(k) \leqslant \Psi(k) \leqslant \varphi(k+1) - 1$ tel que $F^{\varphi(k+1)}$ ait pour sommets:

$$Z^{\Psi(k)+1}, X^{\Psi(k)}_{j_1}, \dots, X^{\Psi(k)}_{j_{p+1}} \qquad (\text{avec } j_r \in \{1, 2, \dots, n+1\},\ r = 1, \dots, p+1).$$

De la convergence de I^k vers $\tilde{I}$ on déduit

$$\lim_{k\to\infty} d(I^{\Psi(k)+1}, F^{\varphi(k+1)}) = 0.$$

De l'hypothèse $\lim \rho^{k+1} = 0$ et de la relation: $I^{k+1} - U^k = \rho^{k+1}(Z^{k+1} - U^k)$, on tire:

$$\lim_{k\to\infty} \| I^{\Psi(k)+1} - U^{\Psi(k)} \| = 0.$$

On a donc aussi

$$\lim_{k\to\infty} d(U^{\Psi(k)}, F^{\varphi(k+1)}) = 0. \tag{1}$$

Mais, par définition de p, on a:

$$d(I^{\Psi(k)+1}, [X^{\Psi(k)}_{j_1}, \dots, X^{\Psi(k)}_{j_{p+1}}]) \geqslant \eta$$

donc, à partir d'un certain rang, on aura aussi

$$d(U^{\Psi(k)}, [X^{\Psi(k)}_{j_1}, \dots, X^{\Psi(k)}_{j_{p+1}}]) \geqslant \frac{\eta}{2}. \tag{2}$$

Soit $U^{\Psi(k)}_p$ la projection de $U^{\Psi(k)}$ sur $F^{\varphi(k+1)}$. De la relation (1) on déduit que

$$\lim_{k\to\infty} (U^{\Psi(k)}_p - U^{\Psi(k)}) = 0.$$

Pour k suffisamment grand, on a d'après (1) et (2): $U^{\Psi(k)}_p$ qui n'appartient pas à $[X^{\Psi(k)}_{j_1}, \dots, X^{\Psi(k)}_{j_{p+1}}]$ donc $Z^{\Psi(k)+1}$ appartient à $[X^{\Psi(k)}_{j_1}, \dots, X^{\Psi(k)}_{j_{p+1}}, U^{\Psi(k)}_p]$ et

$$\lim_{k\to\infty} d(Z^{\Psi(k)+1}, [X^{\Psi(k)}_{j_1}, \dots, X^{\Psi(k)}_{j_{p+1}}, U^{\Psi(k)}]) = 0.$$

La variété $[X^{\Psi(k)}_{j_1}, \dots, X^{\Psi(k)}_{j_{p+1}}, U^{\Psi(k)}]$ étant contenue dans $H^{\Psi(k)}$, on a

$$\lim_{k\to\infty} d(Z^{\Psi(k)+1}, H^{\Psi(k)}) = 0.$$

Puisque $Z^{\Psi(k)+1} \in \bar{H}^{\Psi(k)}$, la distance entre les deux hyperplans parallèles $H^{\Psi(k)}$ et $\bar{H}^{\Psi(k)}$ tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini avec $\varphi(k) \leqslant \Psi(k) \leqslant \varphi(k+1) - 1$.

On a la relation

$$d(H^{\Psi(k)}, \bar{H}^{\Psi(k)}) = \frac{\bar{i}^{\Psi(k)} - i^{\Psi(k)}}{(1 + \| \lambda^{\Psi(k)} \|^2)^{1/2}}$$

où $(1, -\lambda^{\Psi(k)}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ est orthogonal à $H^{\Psi(k)}$.

La quantité $\| \lambda^{\Psi(k)} \|^2$ est bornée supérieurement; en effet, notons $d^k = (1, -\lambda^k)/(1 + \| \lambda^k \|^2)^{1/2}$ la direction unitaire orthogonale à $\bar{H}^k$; si $\| \lambda^{\Psi(k)} \|^2$ était non borné on pourrait extraire de $\{d^{\Psi(k)}\}$ une sous suite convergent vers un élément $(0, d_1, ..., d_n)$ auquel correspondrait un hyperplan d'équation: $([0, d_1, ..., d_n] \mid X) = 0$ et d'appui à Γ; cet hyperplan contiendrait donc Γ qui est symétrique, les éléments $f_1, ..., f_n$ ne seraient alors pas linéairement indépendants.

On a donc

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{i}^{\Psi(k)} - i^{\Psi(k)}) = 0$$

et l'algorithme converge. Q.E.D.

Remarque 3.1. (1) Lorsque l'hypothèse de Haar généralisée (remarque (2.2)) est vérifiée alors la dimension p définie dans la démonstration précédente est égale à $n - 1$. On a alors $\lim_{k\to\infty}(\bar{i}^k - i^k) = 0$.

(2) Lorsque $p = n - 2$ on peut montrer [1] qu'il est impossible d'avoir $\lim_{k\to\infty} \rho^{k+1} = 0$.

(3) Lorsque $E = C(K)$ espace des fonctions réelles continues sur un compact K, muni de la norme: $\| g \| = \operatorname{Max}_{x\in K} | g(x)|$ alors les fonctionnelles extrémales de S' sont de la forme

$$f \mapsto \epsilon f(t), \qquad \text{avec} \quad \epsilon \in \{-1, +1\}, \quad t \in K.$$

L'ensemble $\mathscr{E}(S')$ est alors fermé. L'hypothèse faite sur V dans la proposition 2 est alors que toutes les fonctions de V ne s'annulent pas en un même point de K. Pour d'autres exemples de fonctionnelles extrémales voir [5].

(4) L'hypothèse selon laquelle l'algorithme est itératif n'est pas très forte; sur ses propriétés de généricité on consultera [2].

(5) L'algorithme peut également servir à résoudre le problème plus général consistant à rechercher un hyperplan d'appui à un borné Γ de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui coupe "le plus bas possible" la droite D_0. L'ensemble Γ étant tel que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^n$, il existe $X \in \Gamma$ tel que $([1, -\lambda] \mid X) = \operatorname{Max}_{X\in\Gamma}([1, -\lambda] \mid X)$. Si 0 n'appartient pas à la fermeture de $\hat{\Gamma}$ on a convergence de l'algorithme avec la même démonstration que ci-dessus.

REMERCIEMENT

Ce travail vient d'une idée de Mr. Claude Lobry (Université de Bordeaux). L'auteur l'en remercie vivement.

REFERENCES

1. C. CARASSO, Étude de l'algorithme de Remes en l'absence de condition de Haar, *Numer. Math.* **20** (1972), 165–178.
2. C. CARASSO, Densité des hypothèses assurant la convergence de l'algorithme de Remes, *Rev. Franc. d'Inf. et Rech. Opér.* R-3/1972.
3. N. DUNFORD ET J. T. SCHWARTZ, "Linear operators," part 1, New York, Interscience, 1958.
4. P. J. LAURENT, Théorèmes de caractérisation d'une meilleure approximation dans un espace normé et généralisation de l'algorithme de Rémès, *Numer. Math.* **10** (1967), 190–208.
5. P. J. LAURENT, "Approximation et Optimisation," Hermann, Paris, 1972.
6. E. REMES, Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tchebichef, *C.R.A.S. Paris* **199** (1935), 337–340.
7. I. SINGER, Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque, *Acte. Sci. Math. Szeged* **17** (1956), 181–189.
8. E. STIEFEL, Über diskrete und lineare Tschebyscheff Approximationen, *Numer. Math.* **1** (1959), 1–28.